

LA UNIÓN MISTERIOSA Y OCULTA DE
LA NATURALEZA PUEDE
ASOCIARSE CON LAS MATEMÁTICAS DE
LOS SOLITONES

VLADIMIR SERKIN

VLADIMIR.SERKIN@CORREO.BUAP.MX

LA UNIÓN MISTERIOSA Y OCULTA DE LA NATURALEZA PUEDE ASOCIARSE CON LAS MATEMÁTICAS DE LOS SOLITONES

Es difícil sobreestimar la importancia de las matemáticas en la ciencia. Cuando los científicos quieren enfatizar el papel de las matemáticas en la ciencia, muy a menudo citan la famosa frase de Galileo Galilei: “Las matemáticas son el lenguaje en el que se escriben los libros de la naturaleza”. El escritor italiano Ítalo Calvino, especialista en historia de la ciencia, explicó específicamente: “esta es la metáfora más famosa de Galileo, pero en realidad suena un poco diferente” [1]. El título del folleto de Galileo Galilei “Il Saggiatore” (El Ensayador) [2] de 1623 proviene de la balanza precisa en la que los orfebres pesan el oro: los ensayadores. En esta “escala”, que Galileo llamó “filosófica y justa”, él pesa ideas y opiniones, las suyas y las de los demás. Galilei escribió: “la filosofía está escrita en ese libro enorme que tenemos continuamente abierto delante de nuestros ojos (habló del universo), pero que no puede entenderse si no aprendemos primero a comprender la lengua y a conocer los caracteres con que se ha escrito. Está escrito en lengua matemática, y los caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas sin los cuales es humanamente imposible entender una palabra; sin ellos se deambula en vano por un laberinto oscuro” [2] (ver Figura 1).

Veamos la última frase de esta obra de Galileo Galilei. Hace cuatrocientos años, Galilei nos predijo que el problema fundamental de la ciencia sería que, sin las matemáticas, no podríamos entender el significado de una nueva palabra o término en el lenguaje científico moderno. De hecho, Galilei predice que sólo un aparato matemático adecuado

nos permitirá no vagar en la oscuridad de los malentendidos y que una nueva palabra y un nuevo término pueden convertirse en los creadores de la ciencia.



Figura 1. Página de título de la edición original del folleto de Galileo Galilei “Il Saggiatore”

Todos nosotros, incluso aquellos que no tienen una educación en física o técnica especial, sin duda estamos familiarizados con las palabras “electrón”, “protón”, “neutrón” o “fotón”. Pero probablemente muchas personas escuchan la palabra “solitón” por primera vez y no la entienden. Esto no es de extrañar, aunque el significado de esta palabra se conoce desde hace más de siglo y medio. Los fenómenos físicos y las ecuaciones matemáticas de los solitones resultaron ser universales y fueron descubiertos en matemáticas aplicadas, física de partículas, mecánica de fluidos y oceanografía (especialmente los llamados tsunamis y olas gigantes “rogue waves” en el océano), acústica submarina, radiofísica, astrofísica, dislocaciones en cuerpos cristalinos sólidos, solitones magnéticos en ferromagnetos, solitones de ondas de materia en condensados de Bose-Einstein, explicación de la propagación de impulsos nerviosos similares a solitones en organismos vivos, solitones ópticos en óptica no lineal y comunicaciones de fibra óptica ultra rápidas, en el formidable y extendido fenómeno de la inestabilidad de la modulación en la naturaleza, en la física de láseres de alta potencia de pulsos de luz ultra-cortos que se usan para el confinamiento inercial y el logro de las condiciones necesarias para la fusión nuclear, en los problemas de estabilidad del plasma interior de un reactor de fusión “Tokamak”, e incluso en el control de relámpagos durante una tormenta.

Entonces, ¿qué es y qué significa la palabra “solitón”? Sabemos que las partículas que forman los átomos, en determinadas condiciones, tienen propiedades ondulatorias. Por lo tanto, no es difícil adivinar que el sufijo griego “on” en la palabra “solitón” se usa precisamente para denotar el comportamiento de una onda solitaria como una partícula. Cabe señalar que la palabra “solitón”, introducida por Zabusky y Kruskal en 1965 [3], no solo marcó el comienzo de una nueva era en ciencia

no lineal, sino que también unió a científicos de diferentes áreas de ciencias fundamentales y matemáticas aplicadas. Zabusky y Kruskal eran muy conscientes de la importancia fundamental de su nuevo término “solitón” y enfatizaron la propiedad principal de los solitones: “en otras palabras, los solitones se “pasan” unos a través de otros sin perder su identidad”.

En 1623, Galileo no podía saber que exactamente 400 años después, en 2023, la comunidad científica celebraría el 50 aniversario de una nueva ciencia: los solitones ópticos [4]. Una coincidencia sorprendente es que yo mismo también publiqué mi primer trabajo científico hace 50 años, y mi nombre incluso fue mencionado dos veces en relación con este 50 aniversario de los solitones ópticos [4], porque inventé la capacidad de usar el autoenfoco (en inglés, “self-focusing”) para generar pulsos láser ultracortos y un método para generar solitones Raman (en inglés, “Raman self-scattering effect and N-soliton decay into supercontinuum”). Por eso es natural que comience con los solitones ópticos. Pero primero, unas pocas palabras sobre el científico que vio por primera vez solitones en un canal y, lo más importante, lo bellamente que lo describió [5].

La ola solitaria fue observada y descrita por primera vez en 1834 por el científico e ingeniero naval británico John Scott Russell en un canal cerca de Edimburgo. Aunque la descripción de este fenómeno que Russell citó en su famoso “Informe sobre las olas” [5], se encuentra en casi todos los libros sobre solitones, es difícil resistirse a leer su presentación. Aquí está el cuadro que pinta Russell: “Este es el fenómeno más notable e inusual de todos: en primer lugar, ese mismo día me di cuenta que era el día más feliz de mi vida. Nadie antes que yo tuvo la suerte de observar esto, o al menos en este caso, comprender lo que significa.”

Russell no podía saber que 131 años después, en 1965, aparecería el término solitón, que crearía uno de los métodos matemáticos más bellos de la ciencia moderna: el problema de dispersión inversa y el método de pares de Lax. Solo en los primeros cinco meses de este año 2024, el término solitón ha aparecido en los títulos de artículos científicos más de 9000 veces.

¿Por qué continúa tal interés?

Intentaré explicar este maravilloso fenómeno en pocas palabras y sin fórmulas.

La propagación de rayos y pulsos láser va acompañada de su ensanchamiento y dispersión debido a la difracción y dispersión. Estos fenómenos los vemos al estar observando el arcoiris después de la lluvia o el halo alrededor de la Luna por la noche. Consideremos el proceso de formación de un solitón espacial. ¿Qué pasa si aumentamos la potencia del haz láser? Un haz láser intenso provoca un cambio en el índice de refracción del medio en el que se propaga, que sigue la estructura transversal de la intensidad del rayo. De la misma manera, cuando un pulso incide en un medio, su borde de ataque cambia el índice de refracción y el resto del pulso se propaga en condiciones completamente diferentes. Este es el efecto de la autointeracción, o autoenfoco, si el índice de refracción inducido es similar al perfil de una lente. Si el índice de refracción aumenta al aumentar la intensidad del campo eléctrico, entonces el medio se convierte en una lente autoenfocada.

Para explicar la historia del descubrimiento de los solitones ópticos, me gustaría recordar al físico mundialmente famoso y una excelente persona con quien tuve la suerte de trabajar en el mismo instituto, el Dr. Gurgen Askaryan.

El Dr. Askaryan defendió su segunda tesis de doctor de Estado recién en 1992. Este título es el más alto

después del Ph.D. en la URSS. Le habría resultado muy fácil convertirse en doctor en ciencias si hubiera querido, pero no quiso perder tiempo preparando y defendiendo su tesis. Durante la presentación de la tesis doctoral de Askaryan, yo fui presidente de la comisión de expertos contables, que calculaba los resultados de la votación secreta. Recuerdo bien la decisión unánime del consejo académico y el estruendoso aplauso al final. Durante el examen, Gurgen Askaryan respondió a la pregunta de por qué había elegido solo 72 artículos de los 200 publicados para su informe. Askaryan explicó que eligió 72 “no porque las otras sean peores, sino porque al autor ahora le gustan más estas 72 obras: con ellas experimenté más alegrías y tristezas”.

Utilicé este trabajo invitado para publicar por primera vez en español el resumen del Diploma de Descubrimiento recibido por el Dr. Askaryan. Según la fórmula del Diploma de Apertura N° 67 con prioridad a partir del 22 de diciembre de 1961: “se ha establecido un fenómeno previamente desconocido de autoenfoco de rayos electromagnéticos y sonoros, que consiste en reducir la divergencia (o aumentar la convergencia) de los rayos debido a la aparición de un gradiente transversal del índice de refracción no lineal y la aparición de una guía de ondas no lineal, que reduce la sección transversal del rayo”. Si recordamos la existencia de una sorprendente analogía espacio-temporal en la teoría de las ecuaciones solitónicas, veremos que un solitón siempre se forma como resultado de una compensación precisa de la difracción y la dispersión de ondas debido a la no linealidad.

Otra área donde aparecen solitones es la dinámica de fluidos y la oceanografía. Los dos ejemplos más dramáticos de lo que puede ser un solitón se han producido recientemente: los tsunamis de Indonesia (26 de diciembre de 2004) y Fukushima (11 de marzo de 2011). Un tsunami se produce cuando un terremoto sacude el fondo marino y genera una

onda cuya altura en mar abierto parece inofensiva, alrededor de unos 60 cm. Sin embargo, la longitud de onda de un tsunami es muy grande (algunos cientos de kilómetros) y su velocidad depende de la profundidad del agua, alcanzando en mar abierto valores sorprendentes: entre 300 y 700 km/h. Los efectos devastadores de los tsunamis se deben a que al acercarse a la costa la profundidad del mar disminuye y la velocidad del frente de onda también decrece, lo cual provoca que la altura de la onda se incremente enormemente, pudiendo sobrepasar los 30 metros. Los terremotos, la actividad volcánica y los deslizamientos submarinos de tierra son los factores tsunamigénicos.

Curiosamente, el comportamiento de un tsunami se ha podido explicar utilizando los modelos desarrollados para ondas en aguas de baja profundidad (en inglés, “shallow water waves”). A primera vista, no parecería que el mar fuera un ejemplo de “aguas de baja profundidad”. Sin embargo, la profundidad del mar (M) es mucho más pequeña que la longitud de onda (L) de un tsunami (típicamente $M \sim 4$ km y $L \sim 200$ km), de manera que el cociente M/L resulta ser un número muy pequeño. Esto justifica que el comportamiento de los tsunamis pueda ser descrito mediante ecuaciones para aguas de baja profundidad.

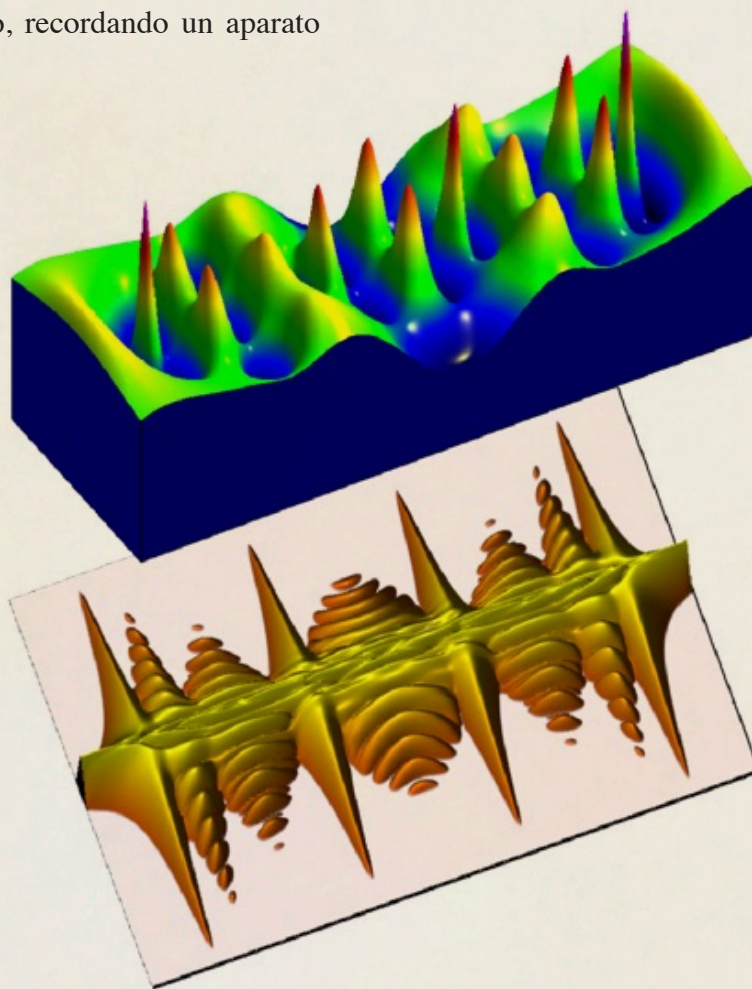
El otro fenómeno formidable que existe en mar abierto son las olas gigantes, que parecen surgir de la nada y desaparecen en segundos sin dejar ningún rastro. Conocidas en la literatura en inglés como “rogue waves”, “freak waves” o “killer waves”, pueden alcanzar hasta 30 metros de altura y constituyen una amenaza para la navegación. La producción de estas olas extremas es común en áreas donde las ondas se propagan con una fuerte corriente de oposición. Un ejemplo bien conocido, donde muchos barcos grandes han tenido dificultades, es la corriente de Agulhas, hacia el sur

de Sudáfrica. La fuerte corriente que va hacia el sur se reúne con el fuerte oleaje de las tormentas en el Océano Antártico.

Hay una variedad de descripciones matemáticas para las olas en el océano. Una de ellas, relacionada con las olas del mar profundo, se basa en la ecuación de Schrödinger no lineal. En este sentido, las ondas solitarias en el océano y las ondas solitarias de materia en los condensados de Bose-Einstein (BEC) son similares a los solitones ópticos. El fenómeno físico relacionado con la producción de ondas gigantes en óptica no lineal se conoce como “inestabilidad de modulación” (IM), que ha sido investigado ampliamente desde los años 1960. Esencialmente, la IM es un mecanismo mediante el cual algunas frecuencias iniciales se amplifican, y las ondas resultantes pueden llegar a tener amplitudes significativamente más altas que las de las condiciones iniciales. El matemático británico Howell Peregrine encontró una solución localizada (racional) de la ecuación NLS, que ahora lleva su nombre: el solitón de Peregrine. Esta es una solución localizada en dos direcciones y aislada en comparación con su entorno. Actualmente, esta ola se considera como una posible explicación de las ondas monstruosas en el océano.

Para demostrar la complejidad y la belleza de las matemáticas de los solitones, presento dos figuras que hice específicamente para este artículo: el desarrollo de un estado ligado de los solitones en el agua y la formación de ondas monstruosas (olas rebeldes) junto con su espectro, lo que abre la posibilidad de su predicción. Se puede ver que la descripción poética de las olas rebeldes como “olas que aparecen de la nada y desaparecen sin dejar rastro” se describe completamente en la Figura 2. La onda monstruosa se muestra rodeada de profundos valles en la estructura de la onda y tiene un patrón triangular amplio en el espectro. Esto se muestra en

la figura con una flecha roja. El espectro de esta onda se ve realmente fantástico, recordando un aparato cósmico extraterrestre.



Desde los tiempos de los antiguos griegos, los científicos soñaron con el uso de la energía de la luz del Sol como fuente de bienestar y, quizás, para la defensa contra posibles enemigos. A finales del segundo siglo d.C., Diocles demostró que una superficie que refleja y concentra los rayos del Sol en un punto es el paraboloide de revolución. De acuerdo con los escritores romanos que describieron la vida de Arquímedes, el matemático griego pasó mucho tiempo diseñando y construyendo armas para defender Siracusa. Algunos historiadores griegos y romanos mencionaron que durante el cerco romano de Siracusa (del 214 al 212 a.C.), en la Segunda Guerra Púnica, Arquímedes usó espejos de bronce para enfocar la luz del Sol en los barcos romanos, y finalmente los quemó.

Figura 2. Arriba: dinámica del estado ligado de los solitones; abajo: el espectro de esta ola

estimulados por el láser.



Figura 3. *Espejos de Arquímedes usados contra un barco militar romano. Pintura mural de Giulio Parigi (1571-1635), un arquitecto y diseñador italiano, hecha entre los años 1599-1600 (Galería Uffizi, Florencia, Italia). Esta pintura, además, puede ser considerada como una ilustración de la idea de generación de balas ópticas solitónicas que surgió hace más de 2200 años.*

En nuestro tiempo, estas ideas siguen inspirando a los físicos. En los últimos años, ha surgido una asombrosa aplicación de pulsos ultracortos de láser. Físicos de varios países han comenzado a utilizar láseres de alta potencia para controlar la propagación de los rayos atmosféricos [6]. Durante un período de dos meses, el espacio sobre la Torre Entis, de 124 metros de altura y ubicada en las montañas de Suiza a dos y medio kilómetros sobre el nivel del mar, estuvo iluminado por un haz de láser durante las tormentas. De los 16 rayos que cayeron sobre la torre durante la observación, cuatro fueron

La idea de la captura de rayos por láser se basa en el fenómeno de filamentación del pulso, que consiste en el autoenfoque cuando el pulso se propaga en la atmósfera. El autoenfoque se acompaña de un aumento de la intensidad del haz y la ionización del aire. Como resultado, se forma un canal estrecho de plasma en el aire durante unos milisegundos y, debido a su alta conductividad, atrae un rayo. Los autores utilizaron un láser Yb:YAG que emite 1000 pulsos solitónicos de picosegundos en un segundo, con una longitud de onda de 1030 nanómetros y una energía de 500 milijulios.

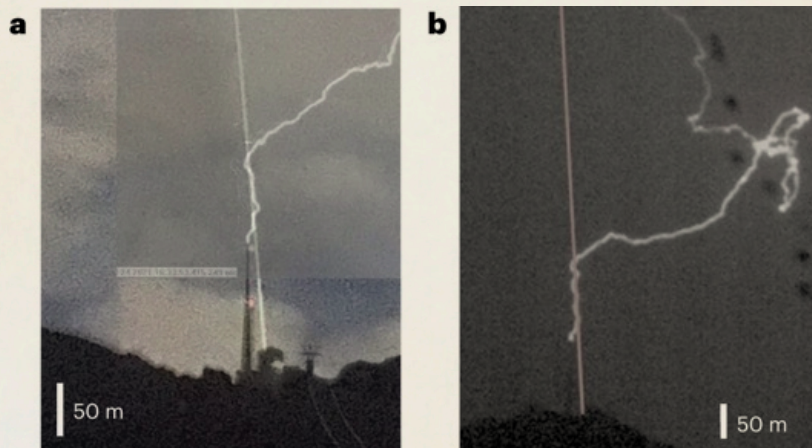


Figura 4. La Torre Entis en Suiza y rayos capturados por láser. Tomado de [6]

Creemos que las matemáticas de los solitones son precisamente el cemento que mantiene unidos los procesos no lineales en diversas ciencias. Por lo tanto, es esta convicción la que hemos puesto en el título de nuestro artículo, y queremos, por así decirlo, “pesar nuestra convicción en la balanza filosófica de oro de la verdad de Galileo”.

Los solitones son las soluciones de ecuaciones diferenciales parciales no lineales, y basándonos en las matemáticas de los solitones, se puede construir un puente entre todas las áreas donde aparecen, es decir, el paradigma solitónico, justificado por la opinión de J. A. Krumhansl, ex-presidente de la American Physical Society [7], puede ser considerado como uno de los mejores ejemplos de unión de disciplinas que conforman la física y como un paradigma de una visión común de la naturaleza. La presencia de procesos no lineales en todas las

áreas científicas mencionadas anteriormente abre la posibilidad de tender un puente entre esas áreas. El solitón óptico presenta un hermoso ejemplo de que un concepto matemático abstracto ha producido un gran impacto en el mundo real de las altas tecnologías. Es bien sabido que las analogías y paralelos matemáticos entre objetos físicos diferentes abren la posibilidad de estudiar estos sistemas en paralelo.

Referencias

[1] Italo Calvino 2009 El libro de la naturaleza en Galileo. *Ciencias* 95, julio-septiembre, 50-53. <https://www.revistacienciasunam.com/en/42-revistas/revista-ciencias-95/186-el-libro-de-la-naturaleza-en-galileo.html>

[2] Galileo Galilei, *Il Saggiatore* (en italiano) (Roma, 1623); *The Assayer*, English trans. Stillman Drake and C. D. O'Malley, in *The Controversy on the Comets of 1618* (University of Pennsylvania Press, 1960).

[3] N.J. Zabusky, M.D. Kruskal 1965 Interaction of solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states, *Phys. Rev. Lett.* 15, 240–243.

[4] J.M. Dudley, C. Finot, G. Genty, R. Taylor 2023 Fifty years of fiber solitons, *Opt. Photonics News* 34, 26–33.

[5] J. S. Russell 1844 Report on waves. Rep. 14th Meet. Brit. Assoc. Adv. Sci., York, 311–390.

[6] A. Houard, P. Walch, T. Produit et al. 2023 Laser-guided lightning. *Nat. Photon.* 17, 231–235.

[7] J.A. Krumhansl 1991 Unity in the science of physics, *Physics Today* 44, 33–38.